SISTEMAS DE MUITOS CORPOS

Curso de Engenharia Física Tecnológica

Série 5

1. Mostre que os momentos da distribuição de probabilidade $\rho(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}$ são dados por $< x^{2n+1} >= 0$, $< x^{2n} >= \frac{\sigma^n}{(2n-1)!!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Interprete em termos do teorema de Wick.

2. a) Aplique o método de Laplace para o cálculo de um integral e obtenha a expansão

$$I(\epsilon) = \int e^{-\frac{1}{\epsilon}f(x)}dx \simeq e^{-\frac{1}{\epsilon}f(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi\epsilon}{f''(x_0)}}\left[1 + \epsilon\left(-\frac{1}{8}\frac{f'^v(x_0)}{(f''(x_0))^2} + \frac{5}{24}\frac{(f'''(x_0))^2}{(f''(x_0))^3}\right) + \cdots\right].$$

b) Como aplicação concreta, obtenha a fórmula de Stirling

$$n! = \int_0^\infty dx e^{-x}x^n \simeq e^{-n+n\ln n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \cdots\right).$$

c) Faça o gráfico das diferentes aproximações dadas pela fórmula de Stirling à função $\Gamma(x)$.

3. Obtenha a expansão em cumulantes

$$\begin{aligned} < e^{\lambda A} >= \exp[\ & \lambda < A > \\ & + \tfrac{1}{2}\lambda^2(< A^2 > - < A >^2) \\ & + \tfrac{1}{6}\lambda^3(< A^3 > -3 < A^2 >< A > +2 < A >^3) \\ & + \tfrac{1}{24}\lambda^4(< A^4 > -4 < A^3 >< A > -3 < A^2 >^2 \\ & +12 < A^2 >< A >^2 -6 < A >^4) \\ & + \cdots] \end{aligned}$$

4. Usando o formalismo canónico obtenha

a) a periodicidade ou antiperiodicidade dos campos bosónicos ou fermiónicos no tempo imaginário, i.e. mostre que a função de Green $\mathcal{G}(\tau - \tau') = - < T_\tau \psi(\tau)\psi^\dagger(\tau') >$ é (anti)periódica no tempo imaginário.

b) o teorema de Wick para temperatura nula,

c) o teorema de Wick para temperatura finita.

5. Obtenha a fórmula de soma de Euler-MacLaurin

$$\sum_{p=0}^{N} f(a+ph) = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx + \frac{1}{2}(f(a)+f(b)) + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{B_p}{p!} h^{p-1}(f^{(p-1)}(b) - f^{(p-1)}(a))$$

em que $h = \frac{a-b}{N}$ e B_p são os números de Bernoulli, definidos por

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{p=0}^{\infty} B_p \frac{t^p}{p!}$$

6. Considere uma partícula movendo-se no potencial $V(x)$. Defina o potencial efectivo $V_{eff}(x_f, t_f; x_i, t_i)$ por

$$< x_f | e^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{p^2}{2m} + V(x))(t_f - t_i)} | x_i >= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_f - t_i)}} e^{\frac{i}{\hbar}(\frac{(x_f - x_i)^2}{t_f - t_i} - V_{eff}(t_f - t_i))}$$

Usando a teoria de perturbações dependentes do tempo dê a expressão de V_{eff} em primeira ordem de aproximação. Discuta qual das aproximações $V(\frac{1}{2}(x_f + x_i))$ ou $\frac{1}{2}(V(x_f) + V(x_i))$ é preferível, nomeadamente em aplicações numéricas.

7. Usando os métodos de Monte Carlo e da matriz de transferência, calcule numericamente:

a) a magnetização e a função de correlação de dois pontos do modelo de Ising a uma dimensão,

b) a energia e o calor específico de um oscilador harmónico quântico e clássico à temperatura T.