**SISTEMAS DE MUITOS CORPOS**
Curso de Engenharia Física Tecnológica
Série 4

1. Mostre as seguintes relações:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$

se se verificar

$$[[A,B],A] = [[A,B],B] = 0$$

b)

$$D^{-1}(\beta)D(\alpha) = D(\alpha-\beta)e^{\frac{1}{2}(\beta^*\alpha-\alpha^*\beta)}$$

$$Tr(D^{-1}(\beta)D(\alpha)) = \delta^2(\alpha-\beta)$$

em que $\delta^2(\alpha-\beta) = \delta(\alpha_r-\beta_r)\delta(\alpha_i-\beta_i)$

c)

$$\lambda^{a^\dagger a} =: e^{(\lambda-1)a^\dagger a}:$$

Tome o limite $\lambda \to 0$ desta expressão.

d)

$$a^\dagger f(N) = f(N-1)a^\dagger$$

$$af(N-1) = f(N)a$$

2. Mostre os seguintes resultados em que $|\alpha>$ é um estado coerente

a)

$$\int \frac{d^2\eta}{\pi} < \alpha|D(\eta)|\beta >< \gamma|D^{-1}(\eta)|\delta >=< \alpha|\delta >< \gamma|\beta > .$$

Verifique que

$$f(\alpha) = \int \frac{d^2\eta}{\pi} e^{-|\eta|^2+\eta^*\alpha} f(\eta).$$

b)

$$\hat{F} = \int \frac{d^2\eta}{\pi} Tr\left(\hat{F}D(\eta)\right) D^{-1}(\eta)$$

c)

$$Tr(\hat{F}\hat{G}) = \int \frac{d^2\eta}{\pi} Tr\left(\hat{F}D(\eta)\right) Tr\left(D^{-1}(\eta)\hat{G}\right)$$

3. A função de Wigner é definida por

$$\rho(x,p) = \int dy \psi\left(x+\frac{y}{2}\right)\psi^*\left(x-\frac{y}{2}\right)e^{-\frac{i}{\hbar}py}.$$

a) Mostre que

$$\int \rho(x,p)\frac{dp}{2\pi\hbar} = |\psi(x)|^2$$

$$\int \rho(x,p)dx = |\psi(p)|^2$$

b) Mostre que a definição dada é equivalente a

$$\rho(x,p) = \int \frac{dx'dp'}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}(x'p-p'x)}\tilde{\rho}(x',p')$$

$$\tilde{\rho}(x',p') = Tr e^{-i(\hat{x}p'-\hat{p}x')}\hat{\rho}$$

em que a matriz densidade é $\hat{\rho} = |\psi><\psi|$ o que corresponde à definição em mecânica clássica

$$\rho(x,p) =< \delta(x-x(t))\delta(p-p(t)) >$$

4. Usando os resultados dos dois problemas anteriores obtenha

a) a função de Wigner do produto de dois operadores sabendo a função de Wigner desses dois operadores,

b) obtenha o traço de um operador sabendo a função de Wigner desse operador.

5. Demonstre as seguintes identidades, válidas para dois operadores quaisquer $A$ e $B$:

$$
\begin{aligned}
B(\lambda) &= e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} \\
&= B + \int_0^\lambda d\lambda' [A, B(\lambda')] \\
&= B + \lambda[A,B] + \frac{\lambda^2}{2!}[A,[A,B]] + \frac{\lambda^3}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
[B, e^{-\lambda A}] = \int_0^\lambda d\lambda' e^{-(\lambda-\lambda')A}[A,B]e^{-\lambda' A}
$$

Como exemplo, calcule

$$
[J_z, e^{-\alpha J_\pm}] = \mp\alpha J_\pm e^{-\alpha J_\pm}
$$

6. Considere uma função de onda Gaussiana $\psi(x) = e^{-\frac{a}{2}x^2+bx+c}$, sendo $a$, $b$, $c$ constantes complexas, com $\Re a > 0$.

a) Qual é a condição de normalização da função de onda?

b) Calcule $<x>$ e $<p>$.

c) Verifique que $(p- <p>)\psi$ e $(x- <x>)\psi$ são proporcionais. Calcule a constante de proporcionalidade.

d) Calcule $\Delta x$ e $\Delta p$. Quando é a relação de incerteza de Heisenberg minimizada?

e) Verifique que a função de onda se pode reescrever na forma

$$
\psi(x) = \left(\frac{a_r}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{a}{2}(x-<x>)^2+\frac{i}{\hbar}<p>x+id}
$$

em que $a_r = \Re a$ e $d$ é uma nova constante real. Interprete esta expressão para a função de onda.

7. Considere um oscilador harmónico, cuja função de onda no instante de tempo inicial $t = t_i$ é dada por uma função de onda gaussiana $\psi(x) = e^{-\frac{a}{2}x^2+bx+c}$, sendo $a$, $b$, $c$ constantes complexas, com $\Re a > 0$, ou, equivalentemente, dada por

$$
\psi(x) = \left(\frac{a_r}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{a}{2}(x-<x>)^2+\frac{i}{\hbar}<p>x-\frac{i}{2}<p><x>+id}
$$

em que $d = c_i + \frac{i}{2} b_i < x >$, e sendo $< x >, < p >$ o valor expectável dos operadores $x, p$ respectivamente. As flutuações destes operadores são dadas por $(\Delta x)^2 = \frac{1}{2a_r}$ e $(\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2 |a|^2}{2a_r}$. A função de onda vai evoluir no tempo continuando a ser gaussiana (pois o elemento de matriz do operador de evolução é gaussiano, por exemplo).

a) Verifique que esta função é solução da equação de Schrödinger e determine as equações de evolução dos parâmetros $a, b, c$.

b) Particularize para uma partícula livre, fazendo a frequência do oscilador harmónico $\omega_0 = 0$. Obtenha a expressão de $a$ em função do tempo, e obtenha $(\Delta x)^2$ e $(\Delta p)^2$ em função do tempo, mostrando o espalhamento da função de onda.

c) Passe a considerar variáveis adimensionais $X = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} x, P = \frac{p}{\sqrt{m\omega_0 \hbar}}$, bem como $u = \frac{\hbar}{m\omega_0} a, v = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} b$. Mostre que $(\Delta x)^2, (\Delta P)^2$ oscilam no tempo com uma frequência $2\omega_0$, mantendo a sua soma constante. Determine $(\Delta x)^2 (\Delta P)^2$.

d) Verifique que $< X >, < P >$ satisfazem as equações clássicas de movimento

$$< X >' = < P >$$

$$< P >' = - < X >$$

sendo a derivação em ordem a $\omega_0 t$.

e) Verifique que a equação de evolução para $c_r$ é automaticamente satisfeita por $e^{c_r} = \left(\frac{a_r}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp(-\frac{b_r^2}{2a_r})$, pois a norma da função de onda é conservada.

f) Obtenha a equação de evolução da fase $d_i$.

g) Compare os resultados obtidos com os encontrados no caso de um estado coerente.

8. Considere o estado $|0>_\lambda$ de um oscilador harmónico a uma dimensão representado pela função de onda

$$\psi_\lambda(x) = < x|0>_\lambda = \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{X^2}{2\lambda}}$$

em que $X$ é a coordenada adimensional. Calcule a sua projecção $< \alpha|0>_\lambda$ sobre o estado coerente $|\alpha>$ e mostre que aquele estado pode ser obtido a partir do estado fundamental pela seguinte expressão:

$$|0>_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}})}} \exp\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda-1}{\lambda+1}(a^\dagger)^2\right)|0> .$$

A função de onda do estado coerente $|\alpha>$ é dada por:

$$\psi_\alpha(x) =< x|\alpha >= \frac{1}{(\pi)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{X^2}{2} + \sqrt{2}\alpha X - \frac{1}{2}(|\alpha|^2+\alpha^2)\right) .$$

9. Dada a matriz densidade $\frac{1}{Z}e^{-\beta\hbar\omega_0 a^\dagger a}$ do conjunto canónico, em que $Z = Tre^{-\beta\hbar\omega_0 a^\dagger a}$, obtenha

a) o elemento de matriz entre estados coerentes (representação holomorfa), correspondente ao ordenamento normal,

b) o representante diagonal, correspondente ao ordenamento anti-normal,

c) a função de Wigner (expressa nas variáveis $\alpha$ e $\alpha^*$), correspondente ao ordenamento simétrico.

10. Obtenha a equação de movimento do operador de evolução (ou a equação de Schrödinger) na representação holomorfa. Particularize para o oscilador harmónico e verifique que a expressão anteriormente obtida para o elemento de matriz do operador de evolução satisfaz esta equação.

11. a) Considere uma função $f(x,p)$ definida no espaço de fase. Defina a sua transformada de Fourier

$$\tilde{f}(x',p') = \int \frac{dxdp}{2\pi} e^{-i(xp'-px')} f(x,p)$$

Reescreva esta dupla transformada de Fourier, se fizermos as mudanças de variável $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+ip), \alpha^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-ip)$. Escreva também a expressão da transformação inversa.

b) Obtenha a função de Dirac para uma variável de Grassmann. Dê uma forma exponencial a essa função. Defina transformada de Fourier para uma função de uma variável de Grassmann. Obtenha expressões idênticas às da alínea anterior para o caso de uma função $f(\alpha,\alpha^*)$, no espaço de fase de um sistema fermiónico.

12. Considere um sistema fermiónico que se encontra, a temperatura $T = 0°K$, num estado abaixo do nível de Fermi. Verifique que o integral de caminho dá correctamente o elemento de matriz do operador de evolução livre entre o estado ocupado $|1>$ e este mesmo estado.