SISTEMAS DE MUITOS CORPOS
Curso de Engenharia Física Tecnológica
Série 1

1. Demonstre as seguintes identidades, válidas para quaisquer operadores:

$$[A, BC] = [A, B]C - B[C, A]$$

$$[A, BC] = \{A, B\}C - B\{C, A\}$$

$$[AB, C] = A[B, C] - [C, A]B$$

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{C, A\}B$$

$$[AB, CD] = A[B, C]D - [C, A]BD + CA[B, D] - C[D, A]B$$

$$[AB, CD] = A\{B, C\}D - \{C, A\}BD + CA\{B, D\} - C\{D, A\}B$$

$$[AB, CD] = A[B, C]D - AC[D, B] + [A, C]DB - C[D, A]B$$

$$[AB, CD] = A\{B, C\}D - AC\{D, B\} + \{A, C\}DB - C\{D, A\}B$$

2. a) Duas partículas (discerníveis) podem ocupar dois estados $|\alpha >, |\beta >$. Verifique que $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha > |\beta > + |\beta > |\alpha >)$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha > |\beta > - |\beta > |\alpha >)$ são vectores próprios do operador de troca P_{12}.

b) Considere o caso de três partículas (discerníveis) que podem ocupar três estados $|\alpha >, |\beta >, |\gamma >$ e discuta a classificação dos estados. Note que o grupo das permutações não é Abeliano (a generalização para mais partículas poderia ser feita recorrendo aos quadros de Young).

3. a) Mostre que o operador número $N = \sum_{is} a^\dagger_{is} a_{is}$ comuta com os operadores que tenham igual número de operadores de criação e de destruição.

b) Mostre que o operador S_z comuta com os operadores que tenham igual número de operadores de subida S_+ e de descida S_-.

4. Considere um sistema de N partículas, que poderão ser spins J ou fermiões com ou sem spin, com condições periódicas fronteira.

a) Quais são os valores possíveis do momento? Indique quais são as funções próprias do operador das translações e discuta a divisão do espaço de Hilbert em conjuntos irredutíveis.

b) Admitindo que o Hamiltoniano é invariante para translações e que N ou S_z também são conservados, indique uma base conveniente de funções de onda.

5. Construa explicitamente matrizes 4×4 que representem os operadores de criação e de destruição fermiónicos $a_0^\dagger$, a_0 e $a_1^\dagger$, a_1 para dois níveis. Verifique as relações de anticomutação.

6. Considere um electrão num determinado estado, acoplado aos electrões de uma banda de condução, de acordo com o Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \hbar\Omega a^\dagger a + \sum_k \hbar\omega_k b_k^\dagger b_k + \sum_k (V_k a^\dagger b_k + V_k^* b_k^\dagger a)$$

Obtenha as equações de movimento dos operadores $a(t)$ e $b_k(t)$. Resolva formalmente as equações de movimento dos operadores $b_k(t)$ da banda de condução e obtenha uma equação de movimento efectiva para o operador $a(t)$ do electrão naquele estado. Interprete fisicamente.

7. Considere um gás de electrões à temperatura $T = 0°K$, interagindo entre si pela força de Coulomb, na presença de um "background" uniforme de carga positiva de modo a assegurar a neutralidade de carga do sistema.

Calcule a energia do sistema na aproximação de primeira ordem no potencial.

8. Considere um sistema de N partículas, com condições periódicas fronteira, que poderão ser electrões com spin com interacções descritas pelo Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = t \sum_{s,j=1}^{N} (a_{js}^\dagger a_{j+1s} + a_{j+1s}^\dagger a_{js}) + U \sum_{j=1}^{N} n_{j\uparrow} n_{j\downarrow}$$

ou spins J com interacções descritas pelo Hamiltoniano de Heisenberg

$$\mathcal{H} = J \sum_{j=1}^{N} \vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1} - \sum_{j=1}^{N} H S_j^z$$

a) Indique uma forma de enumerar os estados do sistema.

b) Escreva um programa que calcule os valores próprios de energia e os estados do sistema, usando métodos standard de diagonalização de matrizes. A diagonalização exacta de sistemas finitos, conjugada com métodos de extrapolação, tem vindo a ser cada vez mais importante, dado o rápido desenvolvimento das capacidades de cálculo que tem havido.

c) Altere o programa de forma a implementar as simetrias de invariância para translações e de conservação de N ou S_z.

9. a) Considere uma cadeia de N spins $\frac{1}{2}$. Mostre que os operadores definidos pela transformação de Jordan-Wigner

$$c(n) = e^{i\pi \sum_{j=1}^{n-1} S^+(j)S^-(j)} S^-(n)$$

$$c^\dagger(n) = S^+(n) e^{-i\pi \sum_{j=1}^{n-1} S^+(j)S^-(j)}$$

são operadores de fermiões sem spin, i.e. que eles satisfazem as relações de anticomutação $\{c(m), c(n)^\dagger\} = \delta_{mn}$, $\{c^\dagger(m), c^\dagger(n)\} = 0$ e $\{c(m), c(n)\} = 0$. Mostre que se tem $c^\dagger(n)c(n) = S^+(n)S^-(n)$.

b) Inverta a transformação dada exprimindo os operadores de spin em termos dos operadores fermiónicos.

10. Considere uma cadeia de N spins $\frac{1}{2}$, com condições periódicas e interacções dadas por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} J_\perp \sum_{j=1}^{N} (S^+(j)S^-(j+1) + S^-(j)S^+(j+1)) + J_\parallel \sum_{j=1}^{N} S^z(j)S^z(j+1)$$

a) Use a transformação de Jordan-Wigner para transformar este problema num problema equivalente para fermiões. Preste atenção às condições fronteira e à paridade de N. Qual é o sub-espaço fermiónico correspondente ao sub-espaço dos spins definido por a magnetização total ser nula?

b) Considere o caso $J_\parallel = 0$. Diagonalize completamente o problema por transformação de Fourier e obtenha a relação de dispersão.

11. Verifique o teorema da spin-estatística no caso das equações de Klein-Gordon e de Dirac. Na equação de Klein-Gordon a densidade de probabilidade não é definida positiva e a densidade de energia é definida positiva.

Na equação de Dirac a densidade de probabilidade é definida positiva e a densidade de energia não é definida positiva. Os operadores de fermiões anticomutam e, portanto, em segunda quantificação, na equação de Dirac, a densidade de energia torna-se definida positiva e a densidade de probabilidade deixa de o ser, pelo que passa a ser interpretada como densidade de carga. Na equação de Klein-Gordon não surgem mudanças de sinal devido a comutadores, continuando a densidade de energia a ser definida positiva e a densidade de probabilidade passa a ser interpretada como densidade de carga.