SISTEMAS DE MUITOS CORPOS
Curso de Engenharia Física Tecnológica
Série 0

1. Considere o funcional $S = \int d^3x dt \mathcal{L}(\phi_a, \frac{\partial \phi_a}{\partial t}, \frac{\partial \phi_a}{\partial \vec{x}})$ que depende dos campos $\phi_a(\vec{x}, t)$, $a = 1, \cdots, M$, e das suas derivadas espaciais e temporal. Mostre que, se os campos $\phi_a(\vec{x}, t)$ estiverem definidos na superfície fronteira da região de integração, a condição de estacionaridade deste funcional é dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\frac{\partial \phi_a}{\partial t}} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\frac{\partial \phi_a}{\partial x^i}} = 0$$

dentro dessa região, sujeito às condições fronteira na superfície.

2. Considere uma cadeia de N partículas de massa m distanciadas entre si de um comprimento a, estando cada uma delas acopladas aos seus vizinhos mais próximos por molas elásticas de constante κ.

a) Escreva o Lagrangeano e as equações de movimento deste sistema de partículas e obtenha o seu Hamiltoniano.

b) Considere o limite contínuo $a \to 0$, e obtenha as densidades Lagrangeana e Hamiltoniana e as equações de movimento no contínuo.

c) Obtenha as equações de movimento no contínuo e a densidade Hamiltoniana directamente a partir da densidade Lagrangeana.

d) Mostre que no contínuo o espaço e o tempo aparecem de uma forma simétrica, havendo uma separação entre grau de liberdade e ponto do espaço onde esse grau de liberdade está definido.

3. Considere um sistema de N partículas, descritas pelo grau de liberdade ϕ_j, $j = 0, 1, \cdots, N-1$, com condições fronteira periódicas, i.e. $\phi_{j+N} = \phi_j$. As partículas estão afastadas entre si de uma distância a, pelo que a coordenada da partícula j é $x_j = ja$. Defina $L = Na$.

a) Defina a transformada de Fourier

$$\phi_j = \sum_k e^{ikj} \tilde{\phi}_k$$

indicando os possíveis valores do momento k. Obtenha a fórmula de inversão desta transformada e indique a(s) relaçõe(s) de ortogonalidade envolvida(s).

b) Considere os limites i) $N \to \infty, a$ fixo, ii) $a \to 0, N \to \infty$, com L fixo, iii) $a \to 0, L \to \infty$, e obtenha as expressões da transformação de Fourier directa e inversa. Dê exemplos de aplicação de cada um dos casos obtidos.

c) Ao escrever um programa em FORTRAN como implementa a enumeração de $0, 1, \cdots, N-1$ ou, mais geralmente, uma enumeração que não seja de 1 a N?

4. Considere um sistema de partículas de massa m acopladas entre si linearmente de acordo com o potencial

$$V = \frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij} x_i x_j$$

a) Por transformação de Fourier introduza os modos normais de vibração. Obtenha o Lagrangeano, o Hamiltoniano e as equações de movimento. Mostre que o sistema fica completamente desacoplado nas novas variáveis.

b) Obtenha a relação de dispersão $\omega(k)$. Estude o limite $k \to 0$ e interprete fisicamente (relacione com o teorema de Goldstone).

c) Considere o limite contínuo $a \to 0$.

5. Considere uma partícula em interacção com um campo electromagnético, de acordo com o Lagrangeano

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{v}}{c}\right)^2} - e(V - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A})$$

a) Mostre que, variando as coordenadas da partícula e definindo os campos

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A},$$

se obtém a equação de movimento $\frac{d\vec{\pi}}{dt} = \vec{F}$, em que $\vec{\pi} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{\vec{v}}{c}\right)^2}}$ é o momento da partícula e $\vec{F} = e(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B})$ é a força de Lorentz.

b) Obtenha o Hamiltoniano e verifique que o acoplamento da partícula ao campo electromagnético é do tipo acoplamento mínimo i.e. da forma

$\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$ e $\mathcal{H} - eV$. Calcule os parêntesis de Poisson (ou, quanticamente, os comutadores) de $p_i - \frac{e}{c}A_i, i = x, y, z$, entre si e com $\mathcal{H} - eV$.

c) Como consequência da definição dos campos obtenha as equações de Maxwell sem fontes

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

Mostre que potenciais diferindo entre si de uma transformação de gauge i.e., relacionados entre si por

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda$$

$$V' = V - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

definem os mesmos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. A que indefinição do Lagrangeano está associada a invariância de gauge?

d) A densidade Lagrangeana do campo é dada por

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right).$$

Mostre que variando os potenciais se obtêm as equações de Maxwell com fontes

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

tendo definido $\rho(\vec{r}) = e\delta(\vec{r} - \vec{r}(t))$ e $\vec{J}(\vec{r}) = e\vec{v}(t)\delta(\vec{r} - \vec{r}(t))$. Verifique que $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$.

e) Obtenha as equações de movimento dos potenciais e a forma que elas tomam nas gauges de Coulomb e de Lorentz, em que se tem $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ e $\frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0$ respectivamente. Discuta a resolução destas equações nestas duas gauges e a separação dos potenciais e das correntes nas chamadas componentes transversais e longitudinal.

f) Discuta a introdução de um termo de escolha de gauge da forma $\delta\mathcal{L} = -\frac{\lambda}{8\pi}\left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha}\right)^2$, bem como de um termo de massa do tipo $\delta\mathcal{L} = \frac{\mu^2}{8\pi}\left(A^\alpha A_\alpha\right)^2$. As gauges de Lorentz, Feynman e Landau são dadas por $\lambda = 0, 1, \infty$, respectivamente.

g) Obtenha a densidade Hamiltoniana.

6. Considere a densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi - V\psi^*\psi$$

a) Mostre que variando os campos $\psi(\vec{x},t)$ e $\psi^*(\vec{x},t)$ se obtém a equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi$$

e o seu complexo conjugado.

b) Use o formalismo canónico para obter os momentos $\Pi_\psi(\vec{x},t)$ e $\Pi_{\psi^*}(\vec{x},t)$ associados aos campos. Por que razão se obtêm condições ligando as variáveis do sistema? Introduza multiplicadores de Lagrange (teoria de Dirac de quantificação de sistemas com ligações) e calcule a densidade Hamiltoniana. Qual o valor que os multiplicadores de Lagrange devem ter para que as condições de ligação sejam satisfeitas ao longo do tempo?

c) A equação de Schrödinger não linear pode ser obtida juntando ao Lagrangeano um termo de interacção da forma $\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{2}(\psi^*\psi)^2$. Obtenha a equação de Schrödinger não linear.

7. Considere a densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(i\hbar c\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc^2\right)\psi$$

a) Mostre que variando os campos $\psi(\vec{x},t)$ e $\overline{\psi}(\vec{x},t)$ se obtém a equação de Dirac

$$\left(i\hbar c\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc^2\right)\psi = 0$$

e o seu conjugado Hermítico.

b) Use o formalismo canónico para obter os momentos $\Pi_\psi(\vec{x},t)$ e $\Pi_{\overline{\psi}}(\vec{x},t)$ associados aos campos. Por que razão se obtêm condições ligando as variáveis do sistema? Introduza multiplicadores de Lagrange (teoria de Dirac de quantificação de sistemas com ligações) e calcule a densidade Hamiltoniana. Qual o valor que os multiplicadores de Lagrange devem ter para que as condições de ligação sejam satisfeitas ao longo do tempo?

c) Os modelos de Thirring ou de Luttinger a uma dimensão (espacial), em que os spinores têm duas componentes apenas, podem ser obtidos juntando ao Lagrangeano um termo de interacção da forma $\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{2}(\overline{\psi}\psi)^2$, ou da forma $\mathcal{L}_{int} = \frac{g'}{2}(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)(\overline{\psi}\gamma_\mu\psi)$. Obtenha a equação de movimento dos campos nestes modelos.

8. Uma partícula de Dirac está acoplada a um campo electromagnético de acordo com o Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(i\hbar c\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc^2\right)\psi - \frac{1}{c}A^\mu J_\mu - \frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

Obtenha as equações de movimento da partícula e dos campos.

9. Considere o Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{\partial\phi^*}{\partial x_\mu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi^*\phi$$

em que $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$.

a) Obtenha a equação de Klein-Gordon.

b) Obtenha a densidade Hamiltoniana e, por transformação de Fourier, a relação de dispersão.

10. Considere o Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - (\nabla\phi)^2\right) - \left(\frac{mc}{\hbar\lambda}\right)^2(1-\cos(\lambda\phi))$$

em que λ é um parâmetro, descrevendo uma partícula a uma dimensão, movendo-se num potencial periódico.

Mostre que a sua equação de movimento é dada pela equação de sine-Gordon

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda\phi) = 0.$$