MECÂNICA QUÂNTICA II
Curso de Eng. Física
Série 3

1. Prove que a aproximação WKB de ordem mais baixa, à função de onda, reproduz a densidade de probabilidade e a densidade de corrente clássicas.

2. Considere um potencial $V(x)$, com um mínimo, e uma partícula num estado ligado desse potencial, com energia E e número de onda k. Supondo que a e b são os pontos de viragem clássicos, isto é, para $x = a, b, V(x) = E$, mostre que $\int_a^b k dx = (n + 1/2)\pi$, com $n = 0, 1, \ldots$ Relacione com a regra de quantificação de Bohr-Sommerfeld.

3. Considere uma partícula numa caixa unidimensional de comprimento L. Mostre que as energias seriam dadas por $E_n^{WKB} = \frac{(\hbar\pi)^2}{2mL^2}(n + \frac{1}{2})^2$, se usássemos de uma forma descuidada a aproximação WKB. Mostre que a aproximação WKB dá correctamente as energias.

4. Mostre que a aproximação WKB dá os níveis de energia exactos para um oscilador harmónico linear. Obtenha a função de onda do estado fundamental nesta aproximação, sem grandes detalhes de cálculo.

5. Considere uma barreira de potencial, e uma partícula incidente na barreira com energia E inferior à altura da barreira. Usando a aproximação WKB, e designando por a e b os pontos de retorno clássicos,

a) escreva a função de onda transmitida,

b) usando as fórmulas de ligação obtenha a função de onda no interior da barreira e na região de incidência,

c) tendo em conta o problema 1, mostre que o coeficiente de transmissão é da forma $T \sim \exp(-2\int_a^b k dx)$.

6. Determine o coeficiente de transmissão através de uma barreira de potencial da forma $V(r) = 0$, se $r < a$, e $V(r) = A/r$ para $r > a$. (Modelo para o decaimento de partículas α dum núcleo.)

7. Determine o coeficiente de transmissão para a emissão de electrões dum

metal quando posto num campo eléctrico constante segundo x, considerando para o metal um modelo unidimensional com os electrões num potencial $V(r) = 0$, se $r < a$, e $V(r) = V_0$, para $r > a$.

Fórmulas de Ligação

a) Ponto de retorno a à direita da região clássica:

$$\frac{2}{\sqrt{k}} \cos\left(\int_x^a k dx - \pi/4\right) << - - - > \frac{1}{\sqrt{k'}} \exp\left(-\int_a^x k' dx\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \sin\left(\int_x^a k dx - \pi/4\right) < - - - >> -\frac{1}{\sqrt{k'}} \exp\left(+\int_a^x k' dx\right)$$

b) Ponto de retorno b à esquerda da região clássica:

$$\frac{1}{\sqrt{k'}} \exp\left(-\int_x^b k' dx\right) < - - - >> \frac{2}{\sqrt{k}} \cos\left(\int_b^x k dx - \pi/4\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{k'}} \exp\left(+\int_x^b k' dx\right) << - - - > \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\left(\int_b^x k dx - \pi/4\right)$$