MECÂNICA QUÂNTICA II

Curso de Eng. Física

Série 1

1. Considere uma partícula que se move a uma dimensão, no patamar de potencial com a descontinuidade no ponto $x = a$, i. e., para o qual se tem $V(x) = V_1$, para $x < a$ e $V(x) = V_2$, para $x > a$. A função de onda é $\psi(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$, para $x < a$ e $\psi(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}$, para $x > a$.

a) Determine as amplitudes de reflexão r, e de transmissão t, da esquerda para a direita, e as amplitudes de reflexão r', e de transmissão t', da direita para a esquerda, definidos por $B = rA + t'D$ e $C = tA + r'D$.

Verifique que os coeficientes de reflexão $R = |r|^2$ e de transmissão $T = \frac{k_2}{k_1}|t|^2$ da esquerda para a direita, satisfazem $R + T = 1$, e que o mesmo se verifica para os coeficientes no sentido inverso.

b) Considere dois patamares de potencial consecutivos, nos pontos $x = a$ e $x = b$. Determine as amplitudes de reflexão e de transmissão efectiva do conjunto dos dois patamares, em função dos coeficientes de cada um dos patamares. Verifique que os coeficientes de reflexão e de transmissão totais R_T e T_T continuam a verificar $R_T + T_T = 1$.

c) Interprete geométricamente os resultados obtidos em termos de reflexões e transmissões sucessivas entre os dois patamares.

d) Em que condições se dá o anulamento do coeficiente de reflexão?

2. (a) Obtenha os níveis de energia e as funções de onda de uma partícula que se move a uma dimensão sob a acção de um potencial do tipo

$$U(x) = A\left(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\right).$$

(b) Resolva o mesmo problema considerando agora um potencial do tipo

$$U(x) = -\frac{U_0}{\cosh^2 \alpha x}$$

3. Considere uma partícula livre sob a acção de um campo magnético uniforme orientado segundo o eixo dos z. Resolva a equação de Schrödinger considerando (a) a gauge de Landau

$$\vec{A} = (-By, 0, 0)$$

e (b) a gauge simétrica

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}.$$

4. Determine os níveis de energia e as funções de onda de um oscilador harmónio isótropo a duas dimensões, $V(r) = m\omega_0^2 r^2/2$ (onde $r^2 = x^2 + y^2$), resolvendo a equação de onda em coordenadas Cartesianas. Determine a degenerescência de cada nível. Escreva a função de onda do estado fundamental e de cada um dos primeiros estados excitados.

b) Escreva a equação de Schrödinger para este problema em coordenadas polares. Construa explicitamente as funções de onda dos primeiros estados excitados, com momento angular $+\hbar$ e $-\hbar$. Estas funções de onda são combinações lineares das funções de onda obtidas na alínea a).

5. Um método elegante de resolver o problema do átomo de Hidrogénio, devido a Schwinger, consiste em transformar a equação radial do átomo de Hidrogénio na equação radial de um oscilador harmónio isótropo a duas dimensões. Para isso, substitua r pela variável $\lambda\rho^2/2$, em que λ é uma constante a determinar, e faça $R_{n,l}(r)$, a função radial do átomo de Hidrogénio, igual a $F(\rho)/\rho$.

a) Mostre que $F(\rho)$ safisfaz a equação radial de um oscilador harmónio a duas dimensões, de frequência $\omega = \sqrt{-2\lambda^2 E/m}$, com momento angular $2l + 1$ e energia $2e^2\lambda$, sendo E a energia do nível do átomo de Hidrogénio.

b) Obtenha, usando os resultados do problema anterior, as energias e o grau de degenerescência dos níveis de energia.

c) Use este método para obter explicitamente a função de onda normalizada do estado fundamental do átomo de Hidrogénio.