TRANSIÇÕES DE FASE
Curso de Engenharia Física Tecnológica
Série 4

1. Obtenha a expansão em cumulantes

$$
\begin{aligned}
< e^{\lambda A} >= \exp[\;& \lambda < A > \\
& +\frac{1}{2}\lambda^2(< A^2 > - < A >^2) \\
& +\frac{1}{6}\lambda^3(< A^3 > -3 < A^2 >< A > +2 < A >^3) \\
& +\frac{1}{24}\lambda^4(< A^4 > -4 < A^3 >< A > -3 < A^2 >^2 \\
& +12 < A^2 >< A >^2 -6 < A >^4) \\
& +\cdots]
\end{aligned}
$$

2. A transformada de Borel da função

$$f(x) = \sum_n a_n x^n$$

é definida por

$$\tilde{f}_B(x) = \sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$$

a) Mostre que se tem

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-t} \tilde{f}_B(xt) dt$$

b) Calcule a transformada de Borel de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ e verifique a relação da alínea anterior.

3. Resolva a equação às derivadas parciais de primeira ordem

$$(\vec{x} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} - n)\phi(\vec{x}) = 0$$

usando o método das características.

4. Obtenha as equações de grupo de renormalização para o modelo de Ising a uma dimensão, com interacções de primeiros vizinhos apenas, estudando o modo como a matriz de transferência se transforma numa transformação de grupo de renormalização (decimação alternada dos spins). Considere primeiro o caso em que o campo magnético é nulo, o caso em que

é pequeno e depois o caso geral. Obtenha os campos de scaling e indique esquematicamente a estrutura de pontos fixos e do fluxo das trajectórias no espaço das constantes de acoplamento.

5. A transformação de grupo de renormalização de Migdal-Kadanoff consiste numa aproximação de deslocação de elos (bond-moving) em que $b-1$ elos em cada direcção são sucessivamente deslocados de modo a podermos aplicar a transformação de grupo de renormalização de decimação (com o rescaling b no comprimento) nessa direção. As constantes de acoplamento transformam-se assim de acordo com

$$K_p' = b^{d-p} R^b (b^{p-1} K_p) \tag{1}$$

em que R^b é o operador definido pela decimação a uma dimensão. Para o modelo de Ising $R^b(K) = \tanh^{-1}[(\tanh K)^b]$. Estas equações não preservam a igualdade das constantes de acoplamento nas diferentes direcções. A simetria pode ser parcialmente restaurada procedendo à mesma série de operações para todas as orientações equivalentes da rede.

a) Mostre que no limite $b \to 1$, escrevendo $b = e^{\delta l} \simeq (1 + \delta l)$, a eq. (1) conduz a

$$\frac{dK}{dl} = (d-1)K + \frac{1}{2}[\sinh 2K \ln(\tanh K)]$$

Para $d = 1$ esta equação é a mesma que se obtem para o modelo de Ising a uma dimensão.

b) Faça $T = K^{-1}$ e expanda esta equação até segunda ordem em T. Mostre o aparecimento de um ponto fixo não trivial.

c) Estude a estabilidade dos pontos fixos e mostre o fluxo de grupo de renormalização. Obtenha a dimensão y_t e compare com a do modelo de Ising a duas dimensões.

6. Considere o modelo ϕ^4 descrito pelo Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(|\nabla\phi|^2 + r\vec{\phi}^2) + \frac{u}{4!}(\vec{\phi}^2)^2 - \vec{h}\cdot\vec{\phi}$$

em que

$$|\nabla\phi|^2 = \sum_{l=1}^{d}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial x_l}\right)^2$$

estando o campo magnético $\vec{h}$ segundo a última direcção. Estude este modelo abaixo de T_C. Para isso, escreva $\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \vec{\pi} \\ \phi_0 + \sigma \end{pmatrix}$, em que ϕ_0 é determinado pela teoria de campo médio.

a) Obtenha a nova expressão para o Hamiltoniano. Obtenha o termo independente dos campos σ e $\vec{\pi}$ e verifique o anulamento do termo linear em σ. Interprete diagramaticamente a condição de campo médio.

b) Obtenha os termos quadráticos nos campos σ e $\vec{\pi}$ e interprete diagramaticamente. Verifique o teorema de Nambu-Goldstone.

c) Obtenha os termos de ordem superior e interprete diagramaticamente.

7. a) Mostre que $\theta(\vec{x}) = \sum_i \theta_i$ com $\theta_i = k_i \tan^{-1}[(y - y_i)/(x - x_i)]$ é solução a duas dimensões de $\nabla^2\theta = 0$ com vórtices de intensidade k_i em posições $\vec{x}_i = (x_i, y_i)$.

b) Mostre que, usando variáveis complexas $z = x + iy$ e $z^* = x - iy$, temos $\nabla^2 = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*}$. Qual é a forma das soluções da equação de Laplace a duas dimensões? Interprete as condições de Cauchy-Riemann em termos de equipotenciais e de linhas de força. Mostre que $\Im \ln(z - z_i)$ é a solução para um vórtice de intensidade unitária localizado em z_i.

d) Represente esquematicamente os vórtices de intensidade ± 1 e ± 2 centrados na origem.