

TRANSIÇÕES DE FASE

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Série 2a

1. Uma cadeia de N partículas de massa m , com condições fronteira periódicas, está em repouso quando as partículas estão separadas de uma distância a . Expandindo a energia potencial do sistema em potências dos desvios, η_i , das coordenadas, para fora da posição de equilíbrio, obtemos:

$$V = -\frac{m}{2} \sum_{ij} C_{ij} \eta_i \eta_j,$$

com $C_{ji} = C_{ij}$, e tendo escolhido como zero da energia o valor da energia no ponto de equilíbrio. Como o sistema é invariante para translações, verifica-se que $C_{ij} = C(i-j) = C_{j-i}$.

a) Obtenha as equações de movimento. Por transformação de Fourier, introduza os modos normais de vibração. Obtenha a relação de dispersão $\omega_q^2 = -\tilde{C}_q$ em que $\tilde{C}_q = \sum_{x_i-x_j} e^{-iq(x_i-x_j)} C_{ij}$.

Verifique que o Hamiltoniano e o Lagrangeano ficam completamente desacoplados nas novas variáveis (modos normais de vibração).

b) Dada a invariância para translações do espaço, um deslocamento arbitrário de uma dada solução das equações de movimento deverá ser também solução. Verifique que terá de ser $\tilde{C}_0 = 0$, implicando o anulamento de ω_q quando $q \rightarrow 0$, ou seja, a existência de um bóson de Nambu-Goldstone.

c) Use a identidade $2\eta_i\eta_j = \eta_i^2 + \eta_j^2 - (\eta_i - \eta_j)^2$ para reescrever o potencial na forma

$$V = \frac{m}{4} \sum_{ij} C_{ij} (\eta_i - \eta_j)^2.$$

Interprete fisicamente. Obtenha de novo as equações de movimento e a relação de dispersão, na forma $\omega_q^2 = \tilde{C}_0 - \tilde{C}_q$.

d) Generalize para um sistema de dimensão d .

e) Considere o limite contínuo $a \rightarrow 0$.

2. Considere a energia de Landau para uma transição de fase, dada por:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2} r\phi^2 + \frac{1}{4} u\phi^4 - H\phi,$$

a) Calcule os expoentes críticos α , β , γ , δ , ν e η , na teoria de campo médio ou de Landau (expoentes clássicos).

b) Tome em conta as flutuações gaussianas, para avaliar o valor médio do quadrado das flutuações do parâmetro de ordem e compare com o quadrado do valor do parâmetro de ordem, dado pela teoria de Landau.

Qual a dimensão crítica superior, abaixo da qual os expoentes críticos clássicos deixam de ser válidos?

Qual a dimensão crítica inferior, abaixo da qual as flutuações destroem a transição de fase?