TRANSIÇÕES DE FASE
Mestrado em Engenharia Física Tecnológica
Série 2a

1. Considere um spin quântico S num campo magnético H, com o Hamiltoniano $\mathcal{H} = -HS_z$.

a) Calcule a função de partição $Z = Tre^{-\beta\mathcal{H}}$, a magnetização $M = < S_z >$ (função de Brillouin) e a susceptibilidade longitudinal $\chi_{zz} = \frac{\partial M}{\partial H}$. Obtenha os valores limites para pequenos e grandes campos magnéticos.

b) Particularize para o caso quântico limite $S = \frac{1}{2}$.

c) Considere o limite clássico $S \to \infty$, $H \to 0$, $SH \to sh$ e obtenha as expressões da função de partição, da magnetização (função de Langevin) e da susceptibilidade longitudinal.

d) Obtenha directamente os resultados da alínea anterior, considerando um spin clássico $\vec{s}$, de módulo fixo $|\vec{s}| = s$.

e) Faça os gráficos de $\frac{Z}{2S+1}, \beta F = -\ln\frac{Z}{2S+1}, \frac{M}{S}$ e de $\frac{\chi_{zz}}{\beta S^2}$, em função de βHS, para vários valores de S, incluindo o caso limite $S \to \infty$.

2. a) Calcule as susceptibilidades transversais χ_{+-}, χ_{-+}, usando

$$S_-|Sm\rangle = \sqrt{(S+m)(S-m+1)}|Sm-1\rangle \quad (1)$$

$$S_+|Sm\rangle = \sqrt{(S-m)(S+m+1)}|Sm+1\rangle \quad (2)$$

ou, alternativamente,

$$S_+S_- = (S+S_z)(S-S_z+1) \quad (3)$$

$$S_-S_+ = (S-S_z)(S+S_z+1) \quad (4)$$

para as relacionar com a susceptibilidade longitudinal χ_{zz}.

b) Manipule a expressão da susceptibilidae longitudinal de modo a obter $\coth\frac{\beta H}{2}M + \frac{\chi_{zz}}{\beta} + M^2 = S(S+1)$. Compare com $\langle S_x^2 + S_y^2\rangle + \langle(S_z - \langle S_z\rangle)^2\rangle + \langle S_z\rangle^2 = S(S+1)$.

c) Obtenha as susceptibilidades $\chi_{xx}, \chi_{xy}, \chi_{yx}$ e χ_{yy}.

d) Qual o comportamento das susceptibilidades transversais, em função do campo (tome o limite clássico).

3. i) Calcule a função de partição, a magnetização $< \hat{S}_\alpha(t) >$ e as funções de correlação $< \hat{S}_\alpha(t)\hat{S}_{\overline{\beta}}(t') >$ para um spin quântico $\hat{\vec{S}}$, em presença de

um campo magnético constante $\vec{H}$, e que se encontra em equilíbrio termodinâmico à temperatura T, sendo $\hat{S}_\alpha$, com $\alpha = 0, \pm 1$ e $\overline{\alpha} = -\alpha$ as componentes esféricas do spin numa base em que o campo magnético está na direcção do eixo dos z. Exprima o resultado em função da magnetização M (função de Brillouin) e da susceptibilidade longitudinal $\chi_0 = \frac{\partial M}{\partial H}$.

ii) Calcule a susceptibilidade magnética, dada pela teoria da resposta linear por $\chi_{\alpha\beta}(t-t') = \frac{i}{\hbar}\theta(t-t') < [\hat{S}_\alpha(t), \hat{S}_{\overline{\beta}}(t')] >_{eq}$, e a sua transformada de Fourier.

iii) Repita este cálculo para a função de correlação ordenada no tempo $< T_t \hat{S}_\alpha(t)\hat{S}_{\overline{\beta}}(t') >_{eq}$.

iv) Considere o limite clássico, $\hbar \to 0$, $S \to \infty$. Verifique que se obtém a função de Langevin para a magnetização de um spin.

4. Numa transição de fase os expoentes críticos β, γ e δ são definidos pelo anulamento da magnetização com a temperatura $M \propto (T_C - T)^\beta$, para $T < T_C$, e da divergência da susceptibilidade com a temperatura $\chi \propto |T - T_C|^{-\gamma}$, para campo magnético nulo, i.e. $H = 0$, e pelo anulamento da magnetização com o campo, $M^\delta \propto H$, para $T = T_C$.

a) Usando a equação de estado $\Delta = H + J_0 M$ e a equação constitutiva $M = B(\Delta)$, do modelo de Heisenberg ferromagnético, determine aqueles expoentes críticos, obtendo os valores clássicos $\beta = \frac{1}{2}, \gamma = 1$ e $\delta = 3$.

b) Verifique que aqueles expoentes são universais, dependendo apenas do facto de se ter $B(\Delta) = a_1\Delta - a_3\Delta^3 + \cdots$, para pequenos valores do campo.

5. Determine a forma como o valor da magnetização, dada pela teoria de campo médio, é reduzida pelas ondas de spin, tanto no caso do ferromagnetismo como no caso do antiferromagnetismo. Analise a dependência na dimensionalidade do espaço e determine a dimensão abaixo da qual o parâmetro de ordem é destruído pelas flutuações (dimensão crítica inferior).

6. Tal como se viu no problema anterior os grupos $SU(2)$ e $O(3)$ tendem, no limite $S \to \infty$, para o grupo de Weyl, caracterizado pelos operadores $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$, obedecendo a $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. É um exemplo de "group contraction". Outro exemplo é o grupo de Lorentz que tende para o grupo de Galileu no limite $c \to \infty$. Indique os geradores do grupo de Lorentz e obtenha as suas relações de comutação. Mostre que no limite $c \to \infty$ se obtém o grupo de Galileu.