FÍSICA da MATÉRIA CONDENSADA

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica
Série 1b

1. Mostre, que se o Hamiltoniano $\mathcal{H}(\lambda)$ depender de um parâmetro λ, a variação da energia dos estados definidos por

$$\mathcal{H}(\lambda)|\lambda\rangle = E(\lambda)|\lambda\rangle$$

satisfaz o teorema de Hellmann-Feynman

$$\frac{dE(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\langle\lambda|\frac{\partial\mathcal{H}(\lambda)}{\partial\lambda}|\lambda\rangle}{\langle\lambda|\lambda\rangle}$$

2. a) Mostre que qualquer matriz do grupo SU(2), de dimensão 2×2, é da forma

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix}$$

em que α, β são números complexos que satisfazem $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

b) Mostre que para a rotação $U(\phi, \vec{n}) = e^{-i\phi\vec{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}$, de um ângulo ϕ em torno do vector $\vec{n}$, se tem $\alpha = \cos\frac{\phi}{2} - i\cos\theta\sin\frac{\phi}{2}$ e $\beta = -i\sin\theta e^{i\varphi}\sin\frac{\phi}{2}$.

c) Mostre que se dois spinores $\Lambda = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ e $\Lambda' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$ verificarem $\Lambda' = U\Lambda$, então os spinores $\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} v^* \\ -u^* \end{pmatrix}$ e $\tilde{\Lambda}' = \begin{pmatrix} v'^* \\ -u'^* \end{pmatrix}$ verificam também a mesma relação.

3. Teoria semi-clássica da ressonância magnética.

Considere um spin electrónico ou nuclear S interactuando com um campo magnético $\vec{h} = (h_1\cos\omega t, h_1\sin\omega t, h_0)$, de acordo com o Hamiltoniano dado por $\mathcal{H} = \vec{h}\cdot\vec{S}$.

Dado que o campo magnético que actua no spin roda com uma velocidade angular constante ω, é possível resolver exactamente este problema, passando para um referencial que roda em torno do eixo dos z com essa velocidade angular. Para isso, faz-se a mudança de representação definida por $|\psi\rangle = e^{-i\omega t S_0}|\chi\rangle$, em que $|\psi\rangle$ e $|\chi\rangle$ são os spinores no referencial do laboratório e no referencial girante, respectivamente.

a) Obtenha o Hamiltoniano $\mathcal{H}'$, na nova representação, e verifique que ele não depende do tempo.

b) Quais são as componentes do campo magnético $\vec{h}'$ no referencial girante? Qual o Hamiltoniano não perturbado do qual a nova representação é a representação da interacção?

c) Qual é o operador de evolução no referencial girante? E no referencial do laboratório?

d) Considere que o spin é um spin $S = \frac{1}{2}$. Se o estado inicial do spinor for $|\psi(t_i)\rangle = |+\rangle$ (i.e. o estado $m = +\frac{1}{2}$ do operador S_0) qual é a amplitude de probabilidade da transição para o estado final $|\psi(t_f)\rangle = |-\rangle$?

e) Em que condições é que a probabilidade desta transição pode ser igual a um (condição de ressonância)?

Formulário:

$$e^{i\varphi\vec{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2} + i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\frac{\varphi}{2}$$

sendo $\vec{n}$ um vector unitário.

4. a) Mostre que a transformada de Fourier de $f(x) = \frac{\mu}{2}e^{-\mu|x|}$ (distribuição de Laplace) é $\tilde{f}(k) = \frac{\mu^2}{k^2+\mu^2}$. Discuta o limite $\mu \to \infty$.

b) Mostre que a transformada inversa de Fourier de $\tilde{g}(k) = \frac{2\mu}{k^2+\mu^2}$ (Lorentziana ou distribuição de Cauchy) é $f(x) = e^{-\mu|x|}$. Discuta o limite $\mu \to 0$.

c) Justifique, sem fazer contas, que a convolução de duas Lorentzianas é uma Lorentziana. Qual é lei de composição dos parâmetro μ? Verifique explicitamente.

5. a) Verifique que a transformada de Fourier do potencial de Yukawa $V(\vec{x}) = \frac{e^{-\mu x}}{x}$ é $\tilde{V}(\vec{q}) = \int d^3x e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\frac{e^{-\mu x}}{x} = \frac{4\pi}{q^2+\mu^2}$.

b) Calcule a transformada inversa, verificando que $\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}\frac{4\pi}{q^2+\mu^2} = \frac{e^{-\mu x}}{x}$.

6. A função delta de Dirac $\delta(x)$ é definida através da sua propriedade

$$\int \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0)$$

em que $\phi(x)$ é uma função de teste contínua na origem e o intervalo de integração contem a origem.

De uma forma análoga, a função $\delta'(x)$ é definida por

$$\int \delta'(x)\phi(x)dx = -\phi'(0)$$

a) Mostre que $\delta(x)$ é uma função par e que $\delta'(x)$ é uma função ímpar.

b) Mostre que $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$, sendo $f(x)$ contínua na origem.

c) Mostre que $f(x)\delta'(x) = f(0)\delta'(x) - f'(0)\delta(x)$ sendo $f(x)$ e $f'(x)$ contínuas na origem. Conclua que $x\delta'(x) = -\delta(x)$.